余随伴軌道法による指標公式(Schmid-Vilonen et al)について (群の表現および非可換調和解析)

AUTHOR(S):

竹内, 潔

数理解析研究所講究録
1124巻 2000年 41-72

余随伴軌道法による指標公式
(Schmid-Vilonen et al) について

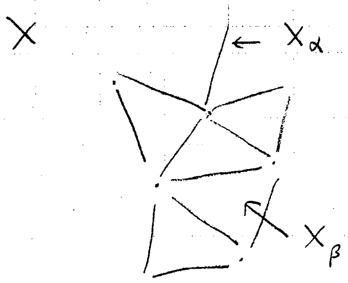
筑波大数学系 竹内 潔 (Kiyoshi Takeuchi)

近年の代数解析的手法の発達により無限次元表現の純代数的な研究が可能になった。特に柏原によるプログラム ([13], [14] etc.) は表現を旗多様体上の ($G_{\mathbb{R}}$-同変) 構成可能層と結びつけるもので、古来からの様々な表現の構成を統一している。この理論の枠組みを利用して最近表現論の重要な問題のいくつかが解かれた ([16], [23]~[25])。本小論説では、Schmid-Vilonen による２つ指標公式 [23] (Lie環$\mathfrak{g}$上の余随伴軌道による積分公式 type と、Atiyah-Bott 型の Lefschetz 不動点公式 type のもの) について筆者なりの解説を試みる．また Guillermou ([8], [7]) による無限次元 index theorem への一般化についても少し言及したい．

§1. 特性サイクルとその functorial property

この節ではまず旗多様体上の構成可能層を研究するための基礎的な用語を解説する。X は以下実解析的多様体とし、$D^b(X)$ により X 上の $\mathbb{C}_X$－加群の層の複体のなす圏 (derived category) を表す。

Def (柏原－Schapira [15])



$F^\cdot \in D^b(X)$ が $\mathbb{R}$-constructible

$\underset{def}{\iff}$ $^\exists$ X の stratification : $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$
(三角形分割)

($X_\alpha \subset X$ は実解析部分多様体) s.t.

$H^i(F^\cdot)\big|_{X_\alpha}$ は locally const sheaf of finite rank

for $^\forall i \in \mathbb{Z}$, $^\forall \alpha \in A$

圏 $D^b(X)$ の元で $\mathbb{R}$-constructible な元全体のなす充満部分圏を $D^b_{\mathbb{R}-c}(X) \subset D^b(X)$ で記す。$F^\cdot \in D^b_{\mathbb{R}-c}(X)$ は定義により X のある stratification $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ の各 stratum X_α 上コホモロジーが locally const だが、$F^\cdot$ のマイクロ台 $SS(F^\cdot) \subset T^*X$ (defined in [15]) について次が成り立つ。

$$\Lambda := SS(F^\cdot) \subset \bigsqcup_{\alpha \in A} T^*_{X_\alpha} X$$

ここに $T^*_{X_\alpha} X$ は X_α の X における余法ベクト

ル束である．このとき Λ の open dense subset Λ_0 であって

$$\begin{cases} \text{(i)}\ \Lambda_0 \text{ は } T^*X \text{ の (subanalytic) submanifold} \\ \text{(ii)}\ \Lambda_0 = \bigsqcup_{\beta \in B} \Lambda_\beta \text{ を conn. component への分解とすると } \forall \beta \in B \text{ に対して } {}^\exists \alpha \in A \text{ s.t} \\ \qquad \Lambda_\beta \underset{\text{open}}{\subset} T^*_{X_\alpha} X. \end{cases}$$

をみたすものが存在する．以下各 Λ_β $(\beta \in B)$ に整数 $m_\beta \in \mathbb{Z}$ を与えて、$F^\cdot \in D^b_{\mathbb{R}-c}(X)$ の「特性サイクル」(characteristic cycle)

$$CC(F^\cdot) = \sum_{\beta \in B} m_\beta [\Lambda_\beta]$$

を定義しよう．各 Λ_β に対して $F^\cdot$ の Λ_β での multiplicity m_β を，

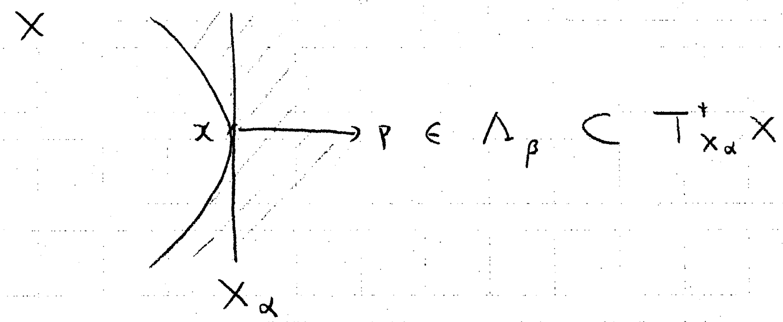
$$m_\beta := \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \dim^{\mathbb{C}} \left[\mathcal{H}^i_{\{\phi \geqq 0\}}(F^\cdot) \right]_x \swarrow \text{x での stalk}$$

で定める．ここに $p \in \Lambda_\beta \subset T^*_{X_\alpha} X$ を勝手な点として，$x = \pi(p)$ $(\pi : T^*X \twoheadrightarrow X)$, $\phi : X \to \mathbb{R}$ は次をみたす実解析関数である．

$$\begin{cases} \text{①}\ \phi(x) = 0 \\ \text{②}\ \Lambda_\phi = \{ (x, d\phi(x)) \mid x \in X \} \subset T^*X \text{ は } T^*_{X_\alpha} X \text{ と } p \text{ で transversal に交わる.} \end{cases}$$

③ $\mathrm{Hess}(\phi|_{X_\alpha})$ は $x \in X_\alpha$ で正定値

$\underset{\neq 0}{p} \in T^*_{X_\alpha}X$ が以下の図のような場合



は $\{\phi \geqq 0\} \subset X$ が斜線部になるようにとればよい。

<u>Def</u> (柏原[12]) $F^\cdot \in D^b_{\mathbb{R}-c}(X)$ の<u>特性cycle</u>を形式和

$$CC(F^\cdot) := \sum_{\beta \in B} m_\beta [\Lambda_\beta]$$ で定義する。

これは(Borel-Moore homology の意味で)サイクル(Lagrangian cycle)であり、柏原-Schapira[15]によるより functorial な構成からサイクルになっていることは自動的に従う。$D^b_{\mathbb{R}-c}(X)$ の distinguished triangle $F' \to F \to F'' \longrightarrow +1$ に対して

$$CC(F) = CC(F') + CC(F'')$$

が成りたつので $D^b_{\mathbb{R}-c}(X)$ の Grothendieck 群を $K(D^b_{\mathbb{R}-c}(X))$ とおくと、$CC(*)$ は T^*X 内の Lagrangian cycle のなす群 $\mathcal{L}(X)$ への群準同型:

$$CC(*) : K(D^b_{\mathbb{R}-c}(X)) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$$

を induce する．[15] により実際これは同型である。さて多様体の射 $f : Y \to X$ にたいして

$$\begin{cases} f^{-1} : D^b_{\mathbb{R}-c}(X) \longrightarrow D^b_{\mathbb{R}-c}(Y) \\ \mathbb{R}f_! : D^b_{\mathbb{R}-c}(Y) \longrightarrow D^b_{\mathbb{R}-c}(X) \end{cases}$$

などの sheaf の level での operation があるが、これらが $CC(*)$ をとおして、Lagrangian cycle の方へ移った場合にどんな operation に対応するか考えよう．例えば $f : Y \to X$ が smooth の場合は

<u>例</u> $f : Y \to X$ が smooth のとき，自然な射

$$T^*Y \xleftarrow{\ \iota\ } Y \times_X T^*X \xrightarrow{\ \tau\ } T^*X \quad \text{について}$$

$$CC(f^{-1}F^\cdot) = \iota_* \tau^{-1}[CC(F^\cdot)]$$

$$\text{for } {}^\forall F^\cdot \in D^b_{\mathbb{R}-c}(X).$$

となる．$f : Y \to X$ が $F^\cdot \in D^b_{\mathbb{R}-c}(X)$ に対して非特性な場合は柏原－Schapira によりよく解っていたが，一般の射 $f : Y \to X$ に対する $CC(*)$ の functorial property は長らく未解明であった。最近 Schmid－Vilonen [22] はこの問題を解決した．:

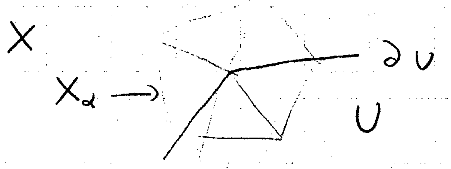
<u>Schmid – Vilonen の open embedding theorem</u>

$U \underset{j}{\hookrightarrow} X$: open (subanalytic) subset とする. $F^\cdot \in D^b_{\mathbb{R}-c}(U)$ に対して ${}^\exists X$ の stratification $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ $\left(\begin{smallmatrix}\text{locally}\\ \text{finite}\end{smallmatrix}\right)$ s.t.

{その一部の union が U や ∂U になり

$F^\cdot$ に適合している}

とせよ. このとき $\mathbb{R}j_*(U) \in D^b_{\mathbb{R}-c}(X)$ であるが、



<u>Theorem</u> (S–V [22])

$$CC\,[\mathbb{R}j_*(F^\cdot)] = \lim_{s \to +0} \Big[\, CC(F^\cdot) + s\, \underbrace{d\log f}_{= df/f} \,\Big]$$

in T^*X. ここで $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ は $f|_{\partial U} = 0$, $f|_U > 0$ をみたす函数.

この定理は $\mathcal{D}$-module の特性サイクルについての Ginsburg [7] の結果 ($\mathbb{C}$-constructible sheaf についてのもの) を $\mathbb{R}$-constructible にまで一般化したものである. 証明は $\mathbb{R}j_*(F^\cdot) \in D^b_{\mathbb{R}-c}(X)$ の超局所的な multiplicity m_β ($SS(\mathbb{R}j_*(F^\cdot)) \supset \Lambda_0 = \bigsqcup_{\beta \in B} \Lambda_\beta$) along Λ_β を定義より局所コホモロジーの言葉で記述し、stratified Morse theory (または柏原–Schapira のマイクロ台の理論) を用いて

変形することでなされる。以下のような応用が得られる.

応用例

① $f: Y \longrightarrow X$: 任意の morph のとき, ${}^\forall F^\cdot \in D^b_{\mathbb{R}-c}(X)$ にたいして, $CC(f^{-1}F^\cdot)$, $CC(f^!F^\cdot)$ が $CC(F^\cdot)$ を用いて記述できる.

(すなわち, 柏原-Schapira の「非特性」の仮定がおとせる.)

② $Y \xrightarrow[p]{} X$: smooth non-proper map とし,

$$\begin{cases} {}^\exists \text{コンパクト化} : \overline{Y} \underset{\text{open}}{\hookleftarrow} Y \\ {}^\exists f: \overline{Y} \to \mathbb{R}, \text{ s.t. } \partial Y = \{f=0\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad f|_Y > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow CC(\mathbb{R}p_*(F^\cdot))$$

$$= \lim_{s \to +0} \tau_* \iota^{-1}\left[CC(F^\cdot) + s\, d\log f \right]$$

$$\text{for } {}^\forall F^\cdot \in D^b_{\mathbb{R}-c}(Y).$$

ここで,

$$T^*Y \xleftarrow[\iota]{} Y \times_X T^*X \xrightarrow[\tau]{} T^*X.$$

すなわち, properでない射についての direct image での $CC(*)$ のふるまいが明らかになった.

§2. twisted モーメント写像と Weyl 群の作用

この節では前節の結果を用いて X が旗多様体の場合に同型

$$CC(*) : K(D^b_{\mathbb{R}-c}(X)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(X)$$

が W-同変（W は Weyl 群）であることをみる。ここでは Schmid-Vilonen [22] の後半にしたがうが、最近 Božičević [5] という人も簡明な別証を得ているようである。まず指標公式の紹介のための準備もかねて Rossmann [20] による twisted モーメント写像を復習する。以下

$$\begin{cases} G : \text{複素半単純 Lie 群} \\ H : \text{Cartan} \subset B : \text{Borel} \subset G \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} \text{対応する Lie alg} \\ \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g} \end{matrix} \right)$$

として、$X = G/B$: flag mfd とする。さらに

$$\begin{cases} W := \{ \mathfrak{g} \text{ の } \mathfrak{h} \text{ にかんする Weyl 群} \} \circlearrowright \mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^* \\ \Delta := \{ \quad \text{〃} \quad \text{root 系} \} \subset \mathfrak{h}^* \\ \Delta^+ := \{ \quad \text{〃} \quad \text{正 root 系} \} \subset \Delta \end{cases}$$

とする。ただし $\Delta^- = \Delta \setminus \Delta^+$ のルート space の直和と $\mathfrak{h}$ の和が $\mathfrak{b}$ となるように Δ^+ を定めた。${}^\forall x \in X$ の isotropy subalg $\mathfrak{b}_x$ について同型

$$\mathfrak{b}_x/[\mathfrak{b}_x,\mathfrak{b}_x] \simeq \mathfrak{b}/[\mathfrak{b},\mathfrak{b}] \xleftarrow{\sim} \mathfrak{h}$$

が成立することに注意しよう。その意味で S-V [22] は $\mathfrak{h}$ を "universal Cartan" と呼んでいる。

X 上の vector bdl $\mathfrak{g}\times X$ の部分束として、

$$\tilde{\mathfrak{n}} := \{ (\xi, x) \mid x\in X,\ \xi\in \mathfrak{n}_x := [\mathfrak{b}_x,\mathfrak{b}_x] \}$$

を考えると、完全列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h}\times X \longrightarrow (\mathfrak{g}\times X)/\tilde{\mathfrak{n}} \longrightarrow TX \longrightarrow 0$$

が得られる（$\because$ $T_xX \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{b}_x$ for $\forall x\in X$）。この双対をとれば、

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T^*X \arrow[r] & \left[(\mathfrak{g}\times X)/\tilde{\mathfrak{n}}\right]^* \arrow[r] \arrow[dl, "\exists p"'] \arrow[dr, "\exists q"] & \mathfrak{h}^*\times X \arrow[r] \arrow[d, "\text{1-st projection}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] & 0 \\
& \mathfrak{g}^* & & \mathfrak{h}^* &
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{g}\twoheadrightarrow\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_x$ の dual よりつくる

なる図式が得られる。

Def $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して $\Omega_\lambda \underset{\mathrm{def}}{:=} p\,q^{-1}(\lambda) \subset \mathfrak{g}^*$ とおく。

λ が regular なら Ω_λ は $\mathfrak{g}^*$ 内の regular semisimple coadjoint G-orbit. 一方 $\lambda=0$ の場合は Ω_λ は

nilpotent cone $N^* \subset \mathfrak{g}^*$ と一致する。

一般に Borel subalg $\mathfrak{b}_x \subset \mathfrak{g}$ の中の Cartan subalg $\mathfrak{t}_x$ のとり方は無限にある。ただ1つをえらび出すために

コンパクト実形 $U_{\mathbb{R}} \subset G$ $\left(\text{e.g. } SU(n) \subset SL(n,\mathbb{C})\right)$ を1つ fix しよう。すると、

$\Rightarrow$ $\forall x \in X$ に対して

極大トーラス $U_{\mathbb{R}} \cap B_x =: T_{\mathbb{R}}$

の複素化 T をとり、その Lie alg を $\mathfrak{t}_x \subset \mathfrak{b}_x$ とすればよい。

この「Cartan の指定」を用いると先程の完全列を右-split させることができる：

$$
\begin{tikzcd}
\left[\mathfrak{g} \times X / \tilde{\mathfrak{n}}\right]^* \arrow[r, two heads] & \mathfrak{h}^* \times X \\
\mathfrak{b}_x \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[r, two heads] & \mathfrak{b}_x / [\mathfrak{b}_x, \mathfrak{b}_x] \arrow[u, phantom, "\cup" description] \\
 & \mathfrak{t}_x \arrow[u, "\wr"'] \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}
$$

: $x \in X$ における fiber

Killing form による同一視 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$

$\exists$ 自然なうめこみが splitting を与える。

よって次の図式より各 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$\begin{tikzcd}
\left[\mathfrak{g}\times X/\tilde{\mathfrak{n}}\right]^* \arrow[d, "p"'] & T^*X \oplus (\mathfrak{h}^*\times X) \arrow[l, "\sim"'] \\
\mathfrak{g}^* & T^*X \arrow[u, hook] \arrow[l, dashed, "\exists \mu_\lambda"]
\end{tikzcd}$$

← $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ による うめこみ

なる <u>twisted モーメント写像</u> が定まる。（$\lambda = 0$ のときは 通常のモーメント map）

<u>性質</u> ① $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し、$\mu_\lambda(T^*X) = \Omega_\lambda$

② $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ が regular なら $\mu_\lambda : T^*X \underset{\text{同型}}{\simeq} \Omega_\lambda$

以下に Weyl 群 W の $CC(*) : K(D^b_{\mathbb{R}-c}(X)) \simeq \mathcal{L}(X)$ の両辺への作用を考えよう。

<u>W の $K(D^b_{\mathbb{R}-c}(X))$ への作用</u>（Beilinson–Bernstein [3]）

<u>Def</u> $x, y \in X$ について、「y が x にたいして relative position $w \in W$ にある」

$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{ccccc} \mathfrak{b}_x/[\mathfrak{b}_x, \mathfrak{b}_x] & \simeq & \mathfrak{h} & \simeq & \mathfrak{b}_y/[\mathfrak{b}_y, \mathfrak{b}_y] \\ \cup & & & & \cup \\ \Delta_x^+ & & & & \Delta_y^+ \end{array}$$

← 対応する positive roots

$\mathfrak{h}$ の中で $w(\Delta_x^+) = \Delta_y^+$

$Y_w := \{(x, y) \in X \times Y \mid y$ は x に対して rel. pos $w\}$

$\subset X \times X$ を考えて X 上の smooth fibrations

$$\begin{tikzcd} & X \times X \\ & Y_w \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

(p, q の fiber は $l(w)$ 次元の cpx mfd)
↑
長さ fct

を用いて、$w \in W$ による作用を

$$I_w : K(D^b_{\mathbb{R}-c}(X)) \longrightarrow K(D^b_{\mathbb{R}-c}(X))$$
$$F^\cdot \longmapsto \mathbb{R}q_* p^{-1}(F^\cdot)\,[l(w)]$$

のように sheaf の"積分変換"で定義できる。

<u>W の Lagrangian cycle $\mathcal{L}(X)$ への作用</u> (by Rossmann)

まず $\mathfrak{h}^*$ の中への curve : $\lambda : [0,1) \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ で

$$\begin{cases} \lambda(0) = 0 \\ \lambda(s) \text{ は regular for } \forall s > 0 \end{cases}$$

をみたすものをとる。$w \in W$ に対して $s > 0$ なら

$$T^*X \xrightarrow[\mu_{\lambda(s)}]{\sim} \Omega_{\lambda(s)} = \Omega_{w(\lambda(s))} \xleftarrow[\mu_{w(\lambda(s))}]{\sim} T^*X.$$

はすべて同型である。

よって Lagrangian cycle $C \in \mathcal{L}(X)$ $(C \subset T^*X)$ に対して

$$J_w(C) := \lim_{s \to +0} [\mu_{w(\lambda(s))}]^{-1} \mu_{\lambda(s)}(C)$$

$\in \mathcal{L}(X)$ とおく。これも作用 $W \underset{J_*}{\curvearrowright} \mathcal{L}(X)$ になる。

<u>Theorem</u> (S−V '96 [22])

$$CC(*) : K(D^b_{\mathbb{R}-c}(X)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(X)$$

は W−同変である.

この定理は complex case ($\mathcal{D}$−加群の場合) の柏原−谷崎 [17] による結果の一般化である。

<u>証明の概略</u>

$F^\cdot \in D^b_{\mathbb{R}-c}(X)$ と simple root $\alpha \in \Delta$ による鏡影 $s_\alpha \in W$ について

$$CC(I_{s_\alpha}(F^\cdot)) = J_{s_\alpha}\, CC(F^\cdot)$$

を示せばよい。ここで

$$X \xleftarrow{\ p\ } Y_{s_\alpha} \xrightarrow{\ q\ } X$$

は $\mathbb{C}$−fibration で $I_{s_\alpha}(*) = \mathbb{R}q_* p^{-1}(*)[1]$ の $\mathbb{R}q_*$ の部分は non-proper direct image である. 従ってこの部分に S−V [22] の open embedding theorem の系としてみた「応用例②」を用いればよい。 /□

§3. 余随伴軌道による指標公式 (S−V '98 [ ])

さて以上の多少長々しい準備の上で、Schmid−Vilonen [23] による指標公式の1つを紹介しよう。

これはいわゆる「Kirillov の軌道法」を一般化するもので、表現論の世界の夢の1つであったと聞く。Schmid − Vilonen は実 Lie 群 $G_{\mathbb{R}}$ の表現が旗多様体 X 上の構成可能層 $F^{\cdot} \in D^{b}_{\mathbb{R}-c}(X)$ と結びつけられたことを利用して、cycle $CC(F^{\cdot}) \subset T^{*}X$ の twisted モーメント map $\mu_{\lambda} : T^{*}X \longrightarrow \mathfrak{g}^{*}$ による像 $\mu_{\lambda}(CC(F^{\cdot}))$ 上の積分を用いて表現の指標公式を得ることに成功した。実の Lie 環 $i\mathfrak{g}^{*}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{g}^{*}$ の中では十分に多くの $G_{\mathbb{R}}$ − orbit がない欠点を、複素 Lie 環 $\mathfrak{g}^{*}$ 上へ出て、さらに $CC(F^{\cdot})$ のように multiplicity を許した cycle を考えることで従来の困難を克服している。

さて $G \supset B \supset H$ は §2 のとおりとして、

$$\begin{cases} G \supset G_{\mathbb{R}} : G \text{の1つの実形} \\ G_{\mathbb{R}} \supset K_{\mathbb{R}} : \text{極大コンパクト群の1つ.} \\ K : K_{\mathbb{R}} \text{の} G \text{内での複素化} \end{cases}$$

とする。

以下では実単純 Lie 群 $G_{\mathbb{R}}$ の無限次元表現 $\rho : G_{\mathbb{R}} \times E \longrightarrow E$ で admissible なもの ($HC(E) := \{E$ の $K_{\mathbb{R}}$ - finite vectors$\}$ の各 $K_{\mathbb{R}}$ - representation の isotypic component が有限次元となる) のみを考察する

(ユニタリー表現は admissible)。 Harish-Chandra 準同型

$$\gamma : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \simeq S(\mathfrak{h})$$

をその image が $\mathfrak{h}^*$ 上の 0 を中心とする W−作用で不変な多項式環 $S(\mathfrak{h})^W$ となるようにとり、環準同型 $\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}$ ($\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $Z(\mathfrak{g})$ は $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の center) を $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ における evaluation

$$\begin{array}{rccc} \chi_\lambda : & Z(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ & z & \longmapsto & \gamma(z)(\lambda) \end{array}$$

で定める。

Def $G_{\mathbb{R}}$ の admissible rep (ρ, E) が中心指標 χ_λ をもつ $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall z \in Z(\mathfrak{g})$ に対して z は E へスカラー倍 $\chi_\lambda(z)$ で作用する.

Schur の Lemma により $G_{\mathbb{R}}$ の $^\forall$既約表現は ある $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ について中心指標 χ_λ をもつ。 また

$$\lambda = \rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha \quad (\text{正ルートの和の半分})$$

のとき、χ_ρ を自明な中心指標と呼ぶ。

構成可能層による表現の構成 (柏原−Schmid [16])

ではこれより $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対する (flag mfd X 上の constructible sheaf $F^\cdot$ を用いた) $G_{\mathbb{R}}$ の中心指標 χ_λ をもつ表現の

構成 (by [16]) について述べよう。まず $N := [B, B]$ とし、Beilinson - Bernstein による <u>enhanced flag mfd</u> $\hat{X}$

$$\hat{X} := X/N \xrightarrow[\tau]{} G/B = X$$

を flag mfd X 上にとる。これは H-主束で $G_{\mathbb{R}} \times H$ の作用をもつ。

<u>Def</u> $\hat{X}$ 上の層 F が $F \in Sh_{\lambda-\rho}$ $(\lambda \in \mathfrak{h}^*)$

$\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ F は $\tau : \hat{X} \twoheadrightarrow X$ の各 fiber $\simeq H$ 上で $e^{\lambda-\rho}$ と同じモノドロミーをもつ。

そして forgetful functor $: D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_\lambda \longrightarrow D^b(Sh_{\lambda-\rho})$ をもつ「twist $\lambda-\rho$ をもつ $G_{\mathbb{R}}$ - equivariant derived category」$D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_\lambda$ を考える (cf. B-L [4])。

同様に、

$$\mathcal{O}_X(\lambda) = \{ f \in \mathcal{O}_{\hat{X}} \mid f \text{ は } \tau \text{ の各 fiber} \simeq H \text{ 上で const} \times e^{\lambda-\rho} \} \subset \mathcal{O}_{\hat{X}}.$$

とおく。$\mathcal{O}_X(\lambda) \in Sh_{\lambda-\rho}$ である。

ここで $F^{\cdot} \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda}$ に対して、その Verdier 双対 $\mathbb{D}(F^{\cdot})$ は $D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_\lambda$ の元であって、

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathbb{D}(F^{\cdot}), \mathcal{O}_X(\lambda))$$

$$= \mathbb{R}\Gamma(X ; \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbb{D}(F^{\cdot}), \mathcal{O}_X(\lambda)))$$

の各コホモロジーは $G_{\mathbb{R}}$ の表現となる. $G_{\mathbb{R}}$ の表現 (ρ, E) に対して, その指標超関数 $\in \mathcal{D}'(G_{\mathbb{R}})$ を $\Theta(E)$ とかいて. $F^{\cdot} \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda}$ の vertical character $\in \mathcal{D}'(G_{\mathbb{R}})$ ($G_{\mathbb{R}}$ 上の distribution) を.

$$\Theta(F^{\cdot}) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i \, \Theta\left[H^i \mathbb{R}Hom(\mathbb{D}(F^{\cdot}), \mathcal{O}_X(\lambda))\right]$$

とおく。我々の目標は $\Theta(F^{\cdot})$ を $F^{\cdot}$ の幾何学的な invariant $CC(F^{\cdot}) \in \mathcal{L}(X)$ で記述することである。

$G_{\mathbb{R}}$ の表現から $F^{\cdot} \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda}$ への逆対応

今度は逆に $G_{\mathbb{R}}$ の中心指標 χ_λ をもつ表現 (ρ, E) より出発して $F^{\cdot} \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda}$ を再構成する道筋を述べよう。 $\lambda-\rho$ が integrable な場合は表現 $e^{\lambda-\rho} : H \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ (とその延長 $e^{\lambda-\rho} : B \to \mathbb{C}^\times$) より associated line bundle

$$L_{\lambda-\rho} \longrightarrow X = G/B$$

が得られる. この line bdl の正則切断のなす可逆層 $\mathcal{L}_{\lambda-\rho}$ は先述の $\mathcal{O}_X(-\lambda+2\rho)$ と一致する. この G-同変ベクトル束 $\mathcal{L}_{\lambda-\rho}$ へ作用する twisted differential operators の層 $\mathcal{D}_{\lambda-\rho}$ を

$$\mathcal{D}_{\lambda-\rho} := \mathcal{L}_{\lambda-\rho} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{D}_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{L}_{\lambda-\rho}^{\otimes -1}$$

で定義する。

$\lambda-\rho$ が integrable でない場合も $\mathcal{D}_{\lambda-\rho}$ は直接構成することができて、以下の対応が成立する。

$$\begin{tikzcd}
\{\text{中心指標 } \chi_\lambda \text{ をもつ } G_{\mathbb{R}}\text{-rep}\} \arrow[d] & \ni & (\rho, E) \arrow[d, mapsto] \\
\{\quad 〃 \quad (\mathfrak{g}, K)\text{-加群}\} \arrow[d, "\wr", "\text{Beilinson-Bernstein対応 ([2])}"'] & \ni & HC(E) \arrow[d, mapsto] \\
\{X \text{ 上の } \mathcal{D}_{\lambda-\rho}\text{-加群}\} \arrow[d, "\wr", "\text{Riemann-Hilbert対応 (柏原、Mebkhout)}"'] & \ni & \mathcal{M}_{\lambda-\rho} \arrow[d, mapsto] \\
D^b_K(X)_{-\lambda} \arrow[d, "\wr", "\text{Mirković-Uzawa-Vilonen [18] の松木対応 for sheaves}"'] & \ni & DR(\mathcal{M}_{\lambda-\rho}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\lambda-\rho}}(\mathcal{L}_{\lambda-\rho}, \mathcal{M}_{\lambda-\rho}) \arrow[d, mapsto] \\
D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda} & \ni & F^{\cdot}
\end{tikzcd}$$

このように $G_{\mathbb{R}}$-rep (ρ, E) から $F^{\cdot} \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda}$ が復元されて、このとき

$$H^i \mathbb{R}Hom(\mathbb{D}(F^{\cdot}), \mathcal{O}_X(\lambda)) = 0 \quad \text{for} \quad i \neq 0$$

が成立する。

S-V '98 [23] の指標公式の1つ

さて、いよいよ Schmid-Vilonen [23] による余随伴軌道積分型の指標公式を述べよう。指数写像

$$\exp : \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$$

により $G_{\mathbb{R}}$ 上の distribution を pull back して、Lie alg character

$$\theta(F^{\cdot}) \underset{\mathrm{def}}{:=} \sqrt{\det(\exp_*)}\ \exp^*(\Theta(F^{\cdot}))$$

を代わりに考えよう。大雑把にいって、彼らの結果は『$\theta(F^{\cdot})$ は $\mu_\lambda(CC(F^{\cdot})) \subset \mathfrak{g}^*$ に台をもつ δ-関数の Fourier 変換になっている』というものである。

Def $\phi \in C_0^\infty(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ の Fourier 変換 $\hat{\phi}$ ($\mathfrak{g}^*$ 上の正則函数) を、$\xi \in \mathfrak{g}^*$ に対して次で定義する。

$$\hat{\phi}(\xi) := \int_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} e^{\xi(x)} \phi(x)\, dx$$

Hörmander の定理より $i\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^* \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ への制限は急減少関数

このとき次が成りたつ。

Theorem (S-V '98 [23]) $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\forall F^{\cdot} \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda}$ に対して、

$$\int_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} \theta(F^{\cdot})\, \phi\, dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n n!} \int_{CC(F^{\cdot})} \mu_\lambda^*(\hat{\phi})\, (-\sigma + \pi^* \tau_\lambda)^{n}$$

T^*X の symplectic 2-form

$\dim^{\mathbb{C}} X$

ここで $\pi : T^*X \twoheadrightarrow X$, τ_λ は X 上のある 2-form.

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ が regular なら, G-coadjoint orbit $\Omega_\lambda \subset \mathfrak{g}^*$ の canonical symplectic form σ_λ について

$$\mu_\lambda^* \sigma_\lambda = (-\sigma + \pi^* \tau_\lambda)$$

$$\left(\mu_\lambda : T^* X \underset{\text{同型}}{\simeq} \Omega_\lambda \subset \mathfrak{g}^* \right)$$

が成立するので, 上の公式は次のように非常に簡明な形になる.

<u>Corollary</u> $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ が regular なら $\forall F^\cdot \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda}$ および $\phi \in C_0^\infty(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ に対して,

$$\int_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} \theta(F^\cdot)\, \phi\, dx = \frac{1}{(2\pi i)^n\, n!} \int_{\mu_\lambda(CC(F^\cdot))} \hat{\phi}\ \sigma_\lambda^n$$

<u>証明の概略</u> $F^\cdot \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda}$ を distinguished triangle $F' \to F \to F'' \to +1$ でより簡単なものに分解する. flag mfd X の各 $G_{\mathbb{R}}$-orbit に associate した次の "standard sheaf" $\in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda}$ について等式を示せばよいことになる.

<u>Def</u> $G_{\mathbb{R}}$-orbit $S \subset X$ 上の $G_{\mathbb{R}}$-同変局所系 F with twist $-\lambda-\rho$ に対し

$$\mathbb{R}j_*(F) \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda} \quad (j : S \hookrightarrow X)$$

とかけるものを <u>standard sheaf</u> という。

<u>Step 1</u> open orbit $S \subset X$ については standard sheaf は $\mathbb{R}j_*(\mathbb{C}_S) \in D^b_{G_\mathbb{R}}(X)_{-\lambda}$ を考えればよく、

$$
\begin{aligned}
&Ⓗ(\mathbb{R}j_*(\mathbb{C}_S)) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i\, Ⓗ\left[H^i \mathbb{R}Hom(\mathbb{D}(\mathbb{R}j_*\mathbb{C}_S), \mathcal{O}_X(\lambda)) \right] \\
&\simeq \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i\, Ⓗ\left[H^i(S; \mathcal{O}_X(\lambda)) \right]
\end{aligned}
$$

のように古典的な discrete series の結果に帰着する。この場合の指標の積分公式は Rossmann [20] の公式を open embedding theorem を用いて書きかえたものになっており、その課程で Schmid の学位論文 [21] の結果が使われている。

<u>Step 2</u> Step 1 の結果を放物誘導の手法を用いて maximally real orbits $S \subset X$ の場合へ一般化している。この部分はかなり専門的で私にはよく解らなかった。maximally real orbit とは $G_\mathbb{R}$-orbit である種のルート系の数 $c(S)$ が 0 であるものである。

<u>Step 3</u> 一般の $G_\mathbb{R}$-orbit $S \subset X$ について $c(S) \geq 0$ についての induction で Step 2 に帰着する。

$S_0 \subset X$: $G_{\mathbb{R}}$-orbit に対して、$c(S_0) > 0$ とする。S_0 に付随した standard sheaf $F_0 \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda}$ について指標公式を示そう。

このとき ${}^\exists S_1 \subset X$: 別の $G_{\mathbb{R}}$-orbit s.t. $c(S_1) = c(S_0) - 1$, ${}^\exists F_1$: S_1 に付随した standard sheaf s.t.

$$I_{s_\alpha}(F_1) = F_0[1] \quad \text{for a simple root } \alpha \in \Delta^+.$$

ここで $\mathbb{C}$-fibrations $X \overset{p}{\twoheadleftarrow} Y_{s_\alpha} \overset{q}{\twoheadrightarrow} X$ について

$$I_{s_\alpha}(F_1) = \mathbb{R}q_* p^{-1}(F_0)[1]$$

であった。§2 の最後の結果より

$$CC(F_0) = CC(I_{s_\alpha}(F_1)[-1])$$

$$= -J_{s_\alpha}[CC(F_1)] \quad \text{である.}$$

よって、
$$\int_{CC(F_0)} \mu_\lambda^*(\hat{\phi})(-\sigma + \pi^*\tau_\lambda)^n$$

$$= -\int_{J_{s_\alpha}[CC(F_1)]} \mu_\lambda^*(\hat{\phi})(-\sigma + \pi^*\tau_\lambda)^n$$

$$\Big\| \leftarrow J_{s_\alpha}[CC(F_1)] = \lim_{t \to +0} [\mu_{t\lambda}^{-1} \circ \mu_{t s_\alpha(\lambda)}](CC(F_1))$$

$$\int_{\mu_\lambda^{-1} \circ \mu_{s_\alpha(\lambda)}(CC(F_1))} \mu_\lambda^*(\hat{\phi})(-\sigma + \pi^*\tau_\lambda)^n$$

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を regular として、図式

$$T^*X \xrightarrow[\sim]{\mu_\lambda} \Omega_\lambda = \Omega_{s_\alpha(\lambda)} \xleftarrow[\mu_{s_\alpha(\lambda)}]{\sim} T^*X$$

および $\mu_\lambda^* \Omega_\lambda = (-\sigma + \pi^* \tau_\lambda)$ 等を用いると、

$$= -\int_{CC(F_1)} \mu_{s_\alpha(\lambda)}^* (\hat{\phi}) (-\sigma + \pi^* \tau_{s_\alpha(\lambda)})^n$$

（λ が regular でない所は等式の両辺が $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ について正則なこと（[23] の Prop 3.7）を用いて、一致の定理で示す。）

induction の仮定 $(c(S_1) < c(S_0))$

$$= -(2\pi i)^n n! \int_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} \theta(F_1) \phi \, dx$$

$$= (2\pi i)^n n! \int_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} \theta(F_0) \phi \, dx$$

H-M-S-W [10] の結果 $(\theta(F_1) = -\theta(F_0))$

以上が証明のあらましであったが、S-V [22] の open embedding theorem は [24] において公表される仮ろの結果においても本質的な役割を果たしている。そこでは [18] による層の松木対応（non-proper direct image が関係する）による特性サイクル

CC(*)のふるまいの解明により、柏原[14]による予想の1つが解かれている。実際、そのためには、open embedding theorem を広中の subanalytic subset よりも広い集合族を基礎とした constructible sheaf の圏へ拡張しておく必要があるのだが、数学基礎論のモデル理論によりそのような集合族の構成が可能になった(van den Dries－Miller [6])。subanalytic sets は多様体の射による順像などの operation について閉じた最も広い概念と今まで考えられ、柏原－Schapira [15] の $\mathbb{R}$－constructible sheaf の理論もその上に立って築かれていた。しかしながら、モデル理論は逆に、subanalytic category はそうした性質を満たす最小の圏であることを教えてくれた訳である。

§4. Atiyah－Bott－Lefschetz 型の不動点公式

さて Schmid－Vilonen [23] のもう1つの指標公式について述べよう。これは $G_{\mathbb{R}}$ がコンパクト群の場合に表現を Borel－Weil 構成で flag mfd X 上の G－同変ベクトル束のコホモロジーとし

て実現した場合の指標公式を、一気に non-compact 群に拡張する結果である。$G_{\mathbb{R}}$ がコンパクトの時は、これは Atiyah-Bott [1] の Lefschetz 型不動点公式によって与えられ、いわゆる Weyl の指標公式の幾何学的意味あいを明らかにしたものであった。柏原 [13] や柏原-Schmid [16] の理論は、flag mfd X 上の定数層 $\mathbb{C}_X$ を一般の $G_{\mathbb{R}}$-同変な constructible sheaf $F^{\cdot} \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda}$ で置きかえて、Borel-Weil 構成をはるかに一般化したものである。そこでこの新しい構成法による表現の指標を $F^{\cdot}$ の幾何的な量で記述するという問題が生じてくる。

$G_{\mathbb{R}}'$ を $G_{\mathbb{R}}$ の正則半単純元全体の集合とする。すると Harish-Chandra の結果により $G_{\mathbb{R}}$ 上の指標超函数 $\Theta(F^{\cdot}) \in \mathcal{D}'(G_{\mathbb{R}})$ は $G_{\mathbb{R}}'$ 上では実解析函数となり、また実際 $G_{\mathbb{R}}'$ 上での値で完全に決まってしまう。$\forall g \in G_{\mathbb{R}}'$ に対して g を通る Cartan $T_{\mathbb{R}} \subset G_{\mathbb{R}}$ があるので

$$T_{\mathbb{R}}' := T_{\mathbb{R}} \cap G_{\mathbb{R}}'$$

上での $\Theta(F^{\cdot})$ ($F^{\cdot} \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda}$) の値を記述すれ

ばよい。以下この $T_{\mathbb{R}}$ を1つ fix する。$g \in T_{\mathbb{R}}'$ の X での不動点集合を

$$X_g := \{ x \in X \mid gx = x \} \subset X$$

とかくと、$\# X_g = \# W$ が成立して、これは $g \in T_{\mathbb{R}}'$ のとり方によらない。よってこれを X_T と記すことにしよう。各 $x \in X_T$ に対して

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \arrow[r, "\sim"] & \mathfrak{b}/[\mathfrak{b},\mathfrak{b}] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathfrak{b}_x/[\mathfrak{b}_x,\mathfrak{b}_x] & \mathfrak{t} \arrow[l, "\sim"'] \\
\lambda \arrow[rrr, mapsto] & & & \lambda_x
\end{tikzcd}$$

$x \in X_T$ ごとに異なる

なる同型が $T_{\mathbb{R}}$ の Lie alg の複素化 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ について成り立つ。以上の記号の下で：

Theorem (Schmid – Vilonen [23]，$\lambda = \rho$ の時は落合 [19] も)

$\forall g \in T_{\mathbb{R}}'$ に対して

$$\mathrm{H}(F^{\cdot})(g) = \sum_{x \in X_T} \frac{c_{g,x}\, e^{(\lambda-\rho)_x}(g)}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha_x})(g)}.$$

ここで $c_{g,x} \in \mathbb{C}$ は g の $F^{\cdot} \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda}$ への作用の不動点 $x \in X_T$ における "local contribution" と呼ばれているものである。

上の公式の "local contribution" は相原 [13] にお

いて導入され、その論文における character cycle $ch(F^{\cdot})$ の $X \times \{g\} \hookrightarrow X \times G$ における「切り口」と一致している。S-V [23] ではやはりこの定理も X の中の各 $G_{\mathbb{R}}$-orbit に同伴する standard sheaf に分け証明している。但し表現論的設定に余りに深く依存した証明は私には大変難しく感じられた。その意味では落合 [19] の証明の方が、($\lambda=\rho$ すなわち trivial な中心指標の場合しか扱っていなくても)ずっと見通しが良いように感じられた。実際、「表現論の設定にこの定理は関係しないであろう」と予想することは次の例をみてみれば、それほど不自然ではない。

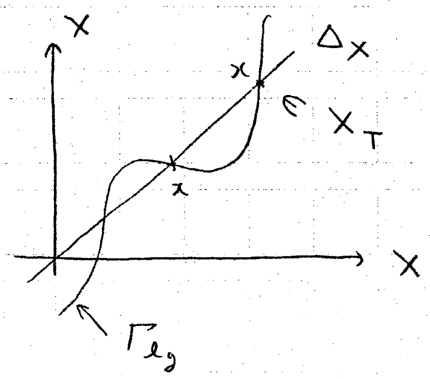
例 $G_{\mathbb{R}} = U_{\mathbb{R}}$ (G のコンパクト実形)の場合、X の $G_{\mathbb{R}}$-orbit は X 全体で、$F^{\cdot} \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda}$ は定数層 $F = \mathbb{C}_X$ のみ。よって上の指標公式は

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \, tr\{ (l_{g^{-1}})^* : H^i(X ; \mathcal{O}_X(\lambda)) \longrightarrow H^i(X ; \mathcal{O}_X(\lambda)) \}$$

$$= \sum_{x \in X_T} \frac{\pm\, e^{(\lambda-\rho)_x}(g)}{\det\{ (Id - (l_g)^*) : T_x^* X \longrightarrow T_x^* X \}}$$

for $\forall g \in T'_{\mathbb{R}}$. のように、Atiyah-Bott [1] によるものと一致する。($\lambda-\rho$ は integral とした)

この例の分子の local contribution $c_{g,x} \in \mathbb{C}$ の部分は、± 1 だが、これは $g \in T_{\mathbb{R}}'$ による左移動 $l_g : X \rightleftarrows X$ のグラフ Γ_{l_g} と diagonal $\Delta_X \hookrightarrow X \times X$ の $x \in X_T = X_g = \Gamma_{l_g} \cap \Delta_X$ における「交点数」となっている。



local contribution の幾何的意味は Goresky-MacPherson らによっても（定数層とは限らない）一般の $F^{\cdot}$ について研究されている。ここで公式の分母が

$$\prod_{x \in X_T} (1 - e^{-\alpha_x})(g) = \det\left\{(Id - (l_g)^*) : T_x^* X \to T_x^* X\right\}$$

のように l_g の不動点のまわりでの作用の固有値で書かれていることに着目しよう。するともう X が flag mfd であるとか、$l_g : X \to X$ が群作用であることかは完全に忘れて、以下のような定理が背景にあることが推察される。

「<u>定理</u>　X はコンパクト複素多様体，$l : X \rightleftarrows X$ は不動点集合 $X_l = \{x \in X \mid lx = x\}$ が discrete

な微分同相とし、$F^\cdot \in D^b_{\mathbb{R}-c}(X)$ に対し同型

$$l^* F^\cdot \xrightarrow{\sim} F^\cdot$$

がうえられているとせよ。このとき任意の X 上の正則ベクトル束 $\mathcal{L}$ で $l^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$ なるもの（G－同変ベクトル束に対応）に対して

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i \operatorname{tr}\left\{ l^* : \operatorname{Ext}^i(F^\cdot, \mathcal{L}) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(F^\cdot, \mathcal{L}) \right\}$$

$$= \sum_{x \in X_l} \frac{C_x(F^\cdot) \times \text{const.}}{\det\{(Id - l^*) : T^*_x X \longrightarrow T^*_x X\}}.$$

（$C_x(F^\cdot)$ は $F^\cdot$ の $l : X \to X$ による $x \in X_l$ での local contribution）

この定理（予想）は、夏の研究集会の際に「大変面白いが難しそうな問題」として講演の最後に話す予定であった。しかし筆者は京都へ着いて Schapira 氏らと話していて、この問題は Guillermou [9] により解かれたばかりであることを知った。講演の前々日のことであった。その後早速プレプリントを入手して読んでみたが、上の予想を含み、Schmid－Vilonen らの結果

も（少なくとも $\lambda-\rho$ が integral weight で X 上に G-同変束のある場合は）完全にカバーしている。Atiyah-Bott [1] の不動点公式と違い、一般には cohomology $\mathrm{Ext}^i(F^\cdot, \mathcal{L})$ は無限次元になってしまうが、$l^*: \mathrm{Ext}^i(F^\cdot, \mathcal{L}) \to \mathrm{Ext}^i(F^\cdot, \mathcal{L})$ は trace class の作用素で trace は有限の値になることが証明されている。[9] の主結果は、その意味で『無限次元版の Atiyah-Bott-Lefschetz 型の不動点公式』といえよう。Guillermou の前の論文 [8] での elliptic pair の条件は、Atiyah の transversal ellipticity のアイデアの導入で不要になり、今回のような一般性をもつに至った。証明は見通しのよいものだが、多くの記号を定義しなくてはならないので、その解説は他日を期したい。

ところで、指標超函数 Ⓗ$(F^\cdot)$ の属する空間

$$\{G_{\mathbb{R}} \text{ 上の } \chi_\lambda \text{ に対する invariant eigen-distributions}\}$$
$$:= \Gamma(G_{\mathbb{R}}; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}_{\chi_\lambda}, \mathcal{D}'_{G_{\mathbb{R}}}))$$

は堀田-柏原 [11] の定理により、$F^\cdot \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)_{-\lambda}$ の character cycle の住む空間 $H_d^{\inf}(\widetilde{G_{\mathbb{R}}}; \mathbb{C}_{-\lambda})$ (Borel-Moore homology, 詳しくは S-V[ ]を参照) と同一視されていて、柏原[13]の予想は表現論の設定を利用して何とか証明されていたが、何故そうした事が成り立つのか今ひとつ舞台裏がはっきりしない感じがしていた。Guillermou[9]の仕事は、この不思議さを大分解消してくれたようである。

最後に、筆者にこのようなサーベイをする事を勧めて下さった谷崎氏、内藤氏、そしてSchmidの学位論文を送って下さった堀田氏に感謝いたします。

References

[1] M-F. Atiyah and R. Bott, *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes,* Ann. Math., **86** (1967), 374-407.

[2] A. Beilinson and J. Bernstein, *Localisations de g-modules,* C.R. Acad. Sc. t. 292, Série I (1981), 15-18.

[3] A. Beilinson and J. Bernstein, *Proof of Jantzen's conjecture,* Adv. Sov. Math., **40** (1993), 1-50.

[4] J. Bernstein and V. Lunts, *Equivariant sheaves and functors,* L.N. in Math 1578, Springer-Verlag (1994).

[5] M. Bozicevic, *A comparison of Weyl group actions on Lagrangian cycles,* Indag. Mathem., **9** (1998), 173-181.

[6] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures,* Duke Math. J., **84** (1996), 497-540.

[7] V. Ginsburg, *Characteristic varieties and vanishing cycles,* Invent. Math., **84** (1986), 327-402.

[8] S. Guillermou, *Lefschetz class of elliptic pairs,* Duke Math. J., **85** (1996), 273-314.

[9] S. Guillermou, *Index of transversally elliptic D-modules,* preprint (1999).

[10] H. Hecht, D. Milicic, W. Schmid and J. Wolf, *Localization and standard modules for real semisimple Lie groups,* preprint (1999).

[11] R. Hotta and M. Kashiwara, *The invariant holonomic systems on a semisimple Lie algebra,* Invent. Math., **75** (1984), 327-358.

[12] M. Kashiwara, *Index theorem for constructible sheaves,* Astérisque, **130** (1985), 193-209.

[13] M. Kashiwara, *Character, character cycle, fixed point theorem and group representation,* Advanced Studies in Pure Mathematics, **14** (1988), 369-378.

[14] M. Kashiwara, *D-modules and representation theory of Lie groups,* Ann. Inst. Fourier, **43** (1993), 1597-1618.

[15] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds,* Grundlehlen der Math. Wiss. 292, Springer-Verlag (1990).

[16] M. Kashiwara and W. Schmid, *Quasi-equivariant D-modules, equivariant derived category, and representations of reductive Lie groups,* Progress in Math., **130** (1994), 457-488.

[17] M. Kashiwara and T. Tanisaki, *The characteristic cycles of holonomic systems on a flag manifold,* Invent. Math., **77** (1984), 185-198.

[18] I. Mirkovic, T. Uzawa and K. Vilonen, *Matsuki correspondence for sheaves,* Invent. Math., **109** (1992), 231-245.

[19] H. Ochiai, *Character, character cycles,* J. Math. Soc. Japan, **45** (1993), 583-598.

[20] W. Rossmann, *Kirillov's character formula for reductive Lie groups,* Invent. Math., **48** (1978), 207-220.

[21] W. Schmid, *Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups,* thesis, Berkely (1967).

[22] W. Schmid and K. Vilonen, *Characteristic cycles of constructible sheaves,* Invent. Math., **124** (1996), 451-502.

[23] W. Schmid and K. Vilonen, *Two geomeric character formulas for reductive Lie groups,* J. Amer. Math. Soc., **11** (1998), 799-867.

[24] W. Schmid and K. Vilonen, *Characteristic cycles and wave front cycles of representations of reductive Lie groups,* to appear in Ann. Math.

[25] H-W. Wong, *Cohomological induction in various categories and the maximal globalization conjecture,* Duke Math. J., **96** (1999), 1-27.

Kiyoshi TAKEUCHI
Institute of Mathematics
University of Tsukuba
1-1-1, Tennodai, Tsukuba, Ibaraki, 305-0006, JAPAN
e-mail: takechan@abel.math.tsukuba.ac.jp